

संभाव्यता

गणित में संभाव्यता (Probability) परिभाषा

संभाव्यता किसी घटना के घटित होने की संभावना का माप है। कई घटनाओं की पूरी निश्चितता के साथ भविष्यवाणी नहीं की जा सकती। हम इसका उपयोग करके केवल किसी घटना के घटित होने की संभावना यानी उनके घटित होने की कितनी संभावना है, का अनुमान लगा सकते हैं। संभाव्यता 0 से 1 तक हो सकती है, जहां 0 का अर्थ है कि घटना असंभव है और 1 एक निश्चित घटना को इंगित करता है। कक्षा 10 के लिए संभाव्यता छात्रों के लिए एक महत्वपूर्ण विषय है जो इस विषय की सभी बुनियादी अवधारणाओं को समझाता है। एक नमूना स्थान में सभी घटनाओं की संभावना 1 तक जुड़ जाती है।

उदाहरण के लिए, जब हम एक सिक्का उछालते हैं, तो या तो हमें हेड या टेल मिलता है, केवल दो संभावित परिणाम संभव हैं (एच, टी)। लेकिन जब दो सिक्के उछाले जाते हैं तो चार संभावित परिणाम होंगे, अर्थात् $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ ।

संभाव्यता का सूत्र

संभाव्यता सूत्र को किसी घटना के घटित होने की संभावना के रूप में परिभाषित किया गया है जो अनुकूल परिणामों की संख्या और परिणामों की कुल संख्या के अनुपात के बराबर है।

घटना घटित होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{परिणामों की कुल संख्या}}$

कभी-कभी विद्यार्थी "अनुकूल परिणाम" को "वांछनीय परिणाम" समझने की भूल कर बैठते हैं। यह मूल सूत्र है। लेकिन विभिन्न स्थितियों या घटनाओं के लिए कुछ और सूत्र भी हैं।

हल किए गए उदाहरण

1) एक बिस्तर में 6 तकिये हैं, 3 लाल, 2 पीले और 1 नीला है। पीला तकिया चुनने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर: संभावना बिस्तर में पीले तकियों की संख्या को तकियों की कुल संख्या से विभाजित करने के बराबर है, यानी $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ।

2) लाल, नीले, हरे और नारंगी रंग की बोतलों से भरा एक कंटेनर है। कुछ बोतलों को बाहर निकाला जाता है और विस्थापित किया जाता है। सुमित ने ऐसा 1000 बार किया और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये:

- निकाली गई नीली बोतलों की संख्या: 300

- लाल बोतलों की संख्या: 200
- हरी बोतलों की संख्या: 450
- नारंगी बोतलों की संख्या: 50

a) इसकी क्या प्रायिकता है कि सुमित हरे रंग की बोतल चुनेगा?

उत्तर: निकाली गई प्रत्येक 1000 बोतलों में से 450 हरी होती हैं।

इसलिए, $P(\text{हरा}) = 450/1000 = 0.45$

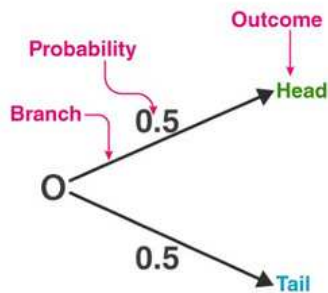
ख) यदि कंटेनर में 100 बोतलें हैं, तो उनमें से कितनी हरी होने की संभावना है?

उत्तर: प्रयोग से पता चलता है कि 1000 में से 450 बोतलें हरी हैं।

इसलिए, 100 बोतलों में से 45 हरी हैं।

संभाव्यता वृक्ष

वृक्ष आरेख विभिन्न संभावित परिणामों को व्यवस्थित और कल्पना करने में मदद करता है। पेड़ की शाखाएँ और सिरे दो मुख्य स्थान हैं। प्रत्येक शाखा की संभावना शाखा पर लिखी होती है, जबकि सिरों पर अंतिम परिणाम लिखा होता है। वृक्ष आरेख का उपयोग यह पता लगाने के लिए किया जाता है कि कब गुणा करना है और कब जोड़ना है। आप सिक्के के लिए वृक्ष आरेख नीचे देख सकते हैं:



संभाव्यता के प्रकार

संभावनाओं के तीन प्रमुख प्रकार हैं:

- सैद्धांतिक संभाव्यता

- प्रायोगिक संभाव्यता
- स्वयंसिद्ध संभाव्यता

सैद्धांतिक संभाव्यता

यह किसी चीज़ के घटित होने की संभावित संभावनाओं पर आधारित है। सैद्धांतिक संभाव्यता मुख्यतः संभाव्यता के पीछे के तर्क पर आधारित है। उदाहरण के लिए, यदि एक सिक्का उछाला जाता है, तो हेड आने की सैद्धांतिक संभावना $\frac{1}{2}$ होगी।

प्रायोगिक संभाव्यता

यह एक प्रयोग के अवलोकनों के आधार पर आधारित है। प्रायोगिक संभाव्यता की गणना परीक्षणों की कुल संख्या के संभावित परिणामों की संख्या के आधार पर की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि एक सिक्के को 10 बार उछाला जाता है और 6 बार हेड प्राप्त होता है, तो हेड की प्रायोगिक संभावना $\frac{6}{10}$ या $\frac{3}{5}$ है।

स्वयंसिद्ध संभाव्यता

स्वयंसिद्ध संभाव्यता में, नियमों या स्वयंसिद्धों का एक सेट निर्धारित किया जाता है जो सभी प्रकारों पर लागू होता है। ये अभिगृहीत कोलमोगोरोव द्वारा निर्धारित किए गए हैं और कोलमोगोरोव के तीन अभिगृहीत के रूप में जाने जाते हैं। संभाव्यता के स्वयंसिद्ध दृष्टिकोण के साथ, घटनाओं के घटित होने या न होने की संभावना को निर्धारित किया जा सकता है। स्वयंसिद्ध संभाव्यता पाठ इस अवधारणा को विभिन्न उदाहरणों के साथ कोलमोगोरोव के तीन नियमों (स्वयंसिद्ध) के साथ विस्तार से शामिल करता है।

सशर्त संभाव्यता किसी पिछली घटना या परिणाम के घटित होने के आधार पर किसी घटना या परिणाम के घटित होने की संभावना है।

किसी घटना की संभावना

मान लें कि एक घटना E n संभावित या संभावित समान रूप से संभावित तरीकों के योग से r तरीकों से घटित हो सकती है। तब घटना के घटित होने या उसके सफल होने की सम्भावना को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है;

$$P(E) = \frac{\text{आर}}{\text{एन}}$$

घटना के घटित न होने या उसकी विफलता के रूप में जात होने की संभावना को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$P(A') = (E \setminus A) / E = 1 - (A / E)$$

E' दर्शाता है कि घटना घटित नहीं होगी।

अतः अब हम कह सकते हैं;

$$P(A) + P(A') = 1$$

इसका मतलब यह है कि किसी भी यादृच्छिक परीक्षण या प्रयोग में सभी संभावनाओं का योग 1 के बराबर होता है।

समान रूप से संभावित घटनाएँ क्या हैं?

जब घटनाओं के घटित होने की सैद्धांतिक संभावना समान होती है, तो उन्हें समान रूप से संभावित घटनाएँ कहा जाता है। किसी नमूना स्थान के परिणामों को समान संभावना कहा जाता है यदि उन सभी के घटित होने की संभावना समान हो। उदाहरण के लिए, यदि आप एक पासा फेंकते हैं, तो 1 प्राप्त होने की संभावना $1/6$ है। इसी प्रकार, 2, 3, 4, 5 और 6 में से सभी संख्याएँ एक-एक करके प्राप्त करने की प्रायिकता $1/6$ है। इसलिए, पासा फेंकते समय समान रूप से संभावित घटनाओं के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं:

- एक पासा फेंकने पर 3 और 5 प्राप्त हो रहे हैं
- पासे पर एक सम संख्या और एक विषम संख्या प्राप्त करना
- एक पासा पलटने पर 1, 2 या 3 प्राप्त करना

समान रूप से संभावित घटनाएँ हैं, क्योंकि प्रत्येक घटना की संभावनाएँ समान हैं।

पूरक घटनाएँ

संभावना यह है कि केवल दो परिणाम होंगे जो बताते हैं कि कोई घटना घटित होगी या नहीं। जैसे कोई व्यक्ति आपके घर आएगा या नहीं आएगा, नौकरी मिलेगी या नहीं मिलेगी आदि पूरक घटनाओं के उदाहरण हैं। मूलतः, किसी घटना के घटित होने की संभावना ठीक इसके विपरीत होती है कि उसके घटित नहीं होने की संभावना होती है। कुछ और उदाहरण हैं:

- आज बारिश होगी या नहीं होगी
- विद्यार्थी परीक्षा में उत्तीर्ण होगा अथवा नहीं।
- आप लॉटरी जीतते हैं या नहीं।

सिद्धांत संभावना

संभाव्यता सिद्धांत की जड़ें 16वीं शताब्दी में थीं जब एक इतालवी गणितज्ञ और चिकित्सक जे. कार्डन ने इस विषय पर पहला काम, द बुक ऑन गेम्स ऑफ चांस को संबोधित किया था। इसकी स्थापना के बाद संभाव्यता के ज्ञान ने महान गणितज्ञों का ध्यान आकर्षित किया। इस प्रकार, **संभाव्यता सिद्धांत** गणित की वह शाखा है जो घटनाओं के घटित होने की संभावना से संबंधित है। हालाँकि कई अलग-अलग संभाव्यता व्याख्याएँ हैं, संभाव्यता सिद्धांत या परिकल्पनाओं के एक सेट के माध्यम से इसे व्यक्त करके अवधारणा की सटीक व्याख्या करता है। ये परिकल्पनाएँ संभावित स्थान के संदर्भ में संभाव्यता बनाने में मदद करती हैं, जो 0 और 1 के बीच मान रखने वाले माप की अनुमति देती है। इसे नमूना स्थान के संभावित परिणामों के एक सेट के लिए संभाव्यता माप के रूप में जाना जाता है।

संभाव्यता घनत्व फ़ंक्शन

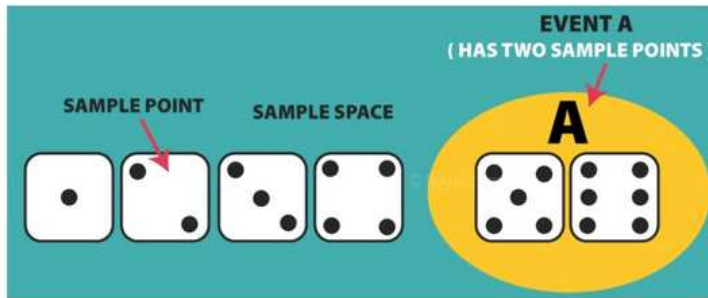
संभाव्यता घनत्व फ़ंक्शन (पीडीएफ) संभाव्यता फ़ंक्शन है जिसे मूल्यों की एक निश्चित सीमा के बीच निरंतर यादृच्छिक चर के घनत्व के लिए दर्शाया जाता है। संभाव्यता घनत्व फ़ंक्शन सामान्य वितरण और माध्य और विचलन कैसे मौजूद है, इसकी व्याख्या करता है। मानक सामान्य वितरण का उपयोग डेटाबेस या सांख्यिकी बनाने के लिए किया जाता है, जिसका उपयोग अक्सर विज्ञान में वास्तविक-मूल्य वाले चर का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है, जिसका वितरण ज्ञात नहीं है।

संभाव्यता नियम और परिभाषा

कुछ महत्वपूर्ण संभाव्यता शर्तों पर यहां चर्चा की गई है:

अवधि	परिभाषा	उदाहरण
नमूना अंतरिक्ष	किसी भी परीक्षण में होने वाले सभी संभावित परिणामों का सेट	1. सिक्का उछालने पर नमूना स्थान $(S) = \{H, T\}$ 2. पासे को घुमाने पर, नमूना स्थान $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
नमूना बिंदु	यह संभावित परिणामों में से एक है	कार्डों के डेक में: 4 दिल एक नमूना बिंदु है। - क्लबों की रानी एक नमूना बिंदु है।

अवधि	परिभाषा	उदाहरण
प्रयोग या परीक्षण	कार्रवाइयों की एक श्रृंखला जहां परिणाम हमेशा अनिश्चित होते हैं।	सिक्का उछालना, ताश की गड्डी से पत्ता चुनना, पासा फेंकना।
आयोजन	यह एक प्रयोग का एकल परिणाम है।	सिक्का उछालते समय चित आना एक घटना है।
नतीजा	किसी परीक्षण/प्रयोग का संभावित परिणाम	जब एक सिक्का उछाला जाता है तो T (पूँछ) एक संभावित परिणाम होता है।
मानार्थ घटना	न घटित होने वाली घटनाएँ। किसी घटना A का पूरक घटना है, A (या A') नहीं	मानक 52-कार्ड डेक में, A = एक दिल बनाएं, फिर A' = एक दिल न बनाएं
असंभव घटना	घटना नहीं घट सकती	एक सिक्का उछालने पर, एक ही समय में चित और पट दोनों प्राप्त करना असंभव है



संभाव्यता के अनुप्रयोग

वास्तविक जीवन में संभाव्यता के विविध प्रकार के अनुप्रयोग हैं। निम्नलिखित घटनाओं के परिणामों की जाँच करते समय कुछ सामान्य अनुप्रयोग जो हम अपने रोजमर्रा के जीवन में देखते हैं:

- ताश की गड्डी में से एक पत्ता चुनना
- सिक्का उछालना
- हवा में पासा फेंकना
- लाल और सफेद गेंदों की बाल्टी से एक लाल गेंद निकालना
- लकी ड्रा जीतना

संभाव्यता के अन्य प्रमुख अनुप्रयोग

- इसका उपयोग विभिन्न उद्योगों में जोखिम मूल्यांकन और मॉडलिंग के लिए किया जाता है
- मौसम की भविष्यवाणी या मौसम परिवर्तन की भविष्यवाणी
- खिलाड़ियों और टीम की ताकत के आधार पर किसी खेल में टीम के जीतने की संभावना
- शेयर बाजार में शेयर की कीमतों में बढ़ोतरी के योग बन रहे हैं

संभाव्यता पर समस्याएँ और समाधान

प्रश्न 1: 'एक पासा उछालने पर 3 प्राप्त होने' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

समाधान:

नमूना स्थान = $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

परिणामों की कुल संख्या = $n(S) = 6$

माना A, 3 प्राप्त होने की घटना है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = $n(A) = 1$

यानी $E = \{3\}$

प्रायिकता, $P(A) = n(A)/n(S) = 1/6$

अतः, $P(\text{पासा पलटने पर 3 प्राप्त करना}) = 1/6$

प्रश्न 2: ताश की गड्डी से एक यादृच्छिक कार्ड बनाएं। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कार्ड एक अंकित कार्ड है?

समाधान:

एक मानक डेक में 52 कार्ड होते हैं।

परिणामों की कुल संख्या = $n(S) = 52$

मान लीजिए E एक फेस कार्ड बनाने की घटना है।

अनुकूल घटनाओं की संख्या = $n(E) = 4 \times 3 = 12$ (केवल जैक, क्वीन और किंग पर विचार किया गया)

संभाव्यता, $P = \text{अनुकूल परिणामों की संख्या} / \text{परिणामों की कुल संख्या}$

$$P(\text{ई}) = \frac{\text{एन(ई)}}{\text{एन(एस)}}$$

$$= 12/52$$

$$= 3/13$$

$$P(\text{निकाला गया कार्ड फेस कार्ड है}) = 3/13$$

प्रश्न 3: एक बर्तन में 4 नीली गेंदें, 5 लाल गेंदें और 11 सफेद गेंदें हैं। यदि बर्तन से यादृच्छिक रूप से तीन गेंदें निकाली जाती हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि पहली गेंद लाल, दूसरी गेंद नीली और तीसरी गेंद सफेद है?

समाधान:

दिया गया,

पहली गेंद मिलने की प्रायिकता लाल है या पहली घटना $5/20$ है।

चूंकि हमने पहली घटना के घटित होने के लिए एक गेंद खींची है, तो दूसरी घटना के घटित होने के लिए शेष संभावनाओं की संख्या $20 - 1 = 19$ है।

अतः, दूसरी गेंद के नीले होने या दूसरी घटना होने की प्रायिकता $4/19$ है।

पुनः पहली और दूसरी घटना के घटित होने पर, तीसरी घटना के घटित होने की संभावनाओं की संख्या $19 - 1 = 18$ है।

और तीसरी गेंद के सफेद होने या तीसरी घटना की प्रायिकता $11/18$ है।

इसलिए, संभावना $5/20 \times 4/19 \times 11/18 = 44/1368 = 0.032$ है।

या हम इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं: $P = 3.2\%$.

प्रश्न 4: दो पासे फेंके जाते हैं, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि योग कितना होगा:

1. 1 के बराबर
2. 4 के बराबर
3. 13 से कम

समाधान:

योग 1 के बराबर होने की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हमें पहले दो पासों का नमूना स्थान S निर्धारित करना होगा जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

$$\begin{aligned} \text{एस} = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \end{aligned}$$

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)
 (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)
 (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) }

तो, $n(S) = 36$

1) मान लीजिए घटना E घटना "योग 1 के बराबर" है। चूँकि, ऐसा कोई परिणाम नहीं है जहाँ योग 1 के बराबर हो, इसलिए,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$$

2) मान लीजिए पासे पर संख्याओं का योग 4 आने की घटना A है।

तीन संभावित परिणाम 4 के बराबर योग देते हैं वे हैं:

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

$$n(A) = 3$$

$$\text{अतः, } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3) मान लीजिए बी पासे पर संख्याओं का योग 13 से कम आने की घटना है।

नमूना स्थान से, हम घटना बी के लिए सभी संभावित परिणाम देख सकते हैं, जो बी से कम राशि देता है। जैसे:

(1,1) या (1,6) या (2,6) या (6,6)।

तो आप देख सकते हैं कि किसी घटना के घटित होने की सीमा तब होती है जब दोनों पासों की संख्या 6 होती है, अर्थात (6,6)।

$$\text{इस प्रकार, } n(B) = 36$$

इस तरह,

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1$$

Exercise

1. तीन पासे एक साथ फेंके जाते हैं। उन पर आने वाले अंकों का योग 17 या 18 होने की प्रायिकता है-

- A. $\frac{1}{9}$
- B. $\frac{1}{72}$
- C. $\frac{1}{54}$
- D. इनमें से कोई नहीं

2. एक संदूक में 3 सफेद व 2 लाल गेंदे हैं। एक गेंद निकालते हैं तथा इस गेंद को बिना वापस रखे एक गेंद और निकालते हैं, तो दूसरी गेंद के लाल होने की प्रायिकता है -

- A. $\frac{8}{25}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $\frac{21}{25}$

3. किसी शहर में 40% व्यक्तियों के भूरे बाल हैं, 25% व्यक्तियों की भूरी आँखें हैं एवं 15% व्यक्तियों के बाल व आँखें दोनों भूरे हैं। यदि शहर में से एक व्यक्ति को चुना जाता है जिसके बाल भूरे हैं, तो इस व्यक्ति की आँखें भूरी होने की प्रायिकता होगी -

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{3}{8}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $\frac{2}{3}$

4. एक थैले में 2 सफेद तथा 4 काली गेंदे हैं। इनमें से एक गेंद वापस रखते हुए 5 बार निकाली जाती है। कम से कम चार गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता है -

- A. $\frac{8}{141}$
- B. $\frac{10}{243}$
- C. $\frac{11}{243}$
- D. $\frac{8}{41}$

5. तीन एकसमान पासे फेंके जाते हैं, उन पर एक ही संख्या के आने की प्रायिकता है -

- A. $\frac{1}{6}$
- B. $\frac{1}{36}$
- C. $\frac{1}{18}$
- D. $\frac{3}{28}$

Answer Key

- 1. C
- 2. B
- 3. B
- 4. C
- 5. B

